INTRODUCTION AUX PROBABILITÉS
Série 7

Exercice 1. [Variables discrètes et continues] Soit X une variable aléatoire. Démontrez que :

- X est discrète, c'est-à-dire que sa fonction de répartition F_X est constante par morceaux, si et seulement si il existe un ensemble dénombrable $S \subseteq \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{P}(X \in S) = \mathbb{P}_X(S) = 1$.
- X est continue, c'est-à-dire que sa fonction de répartition F_X est continue, si et seulement si pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X = y) = \mathbb{P}_X(\{y\}) = 0$.

Exercice 2. Prouvez le Théorème 3.3 dans le cadre des variables aléatoires discrètes : montrez que chaque fonction de répartition constante par morceaux F donne naissance à une unique (en loi) variable aléatoire discrète X_F satisfaisant $\mathbb{P}_{X_F}((-\infty, x]) = F(x)$.

Exercice 3. [Variable binomiale comme nombre d'événements réalisés] Supposons que nous ayons n événements mutuellement indépendants $E_1, \dots, E_n$ de même probabilité p sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Considérons X correspondant au nombre de succès/événements réalisés : $X = \sum_{i=1}^n 1_{E_i}$. Montrez que X est une variable aléatoire et suit la loi $Bin(n, p)$.

Déduisez-en que si $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes de loi $Ber(p)$ définies sur le même espace de probabilité, alors leur somme suit la loi $Bin(n, p)$.

Exercice 4. [Limite de variables uniformes discrètes] Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Soient $X_1, X_2, \dots$ des variables aléatoires discrètes de loi uniforme :

$$X_n(\Omega) = \big\{\frac{k}{n} : \ k = 1, \dots, n\big\}, \quad \mathbb{P}(X_n = x) = \frac{1}{n}, \ \forall x \in X_n(\Omega).$$

Montrez que pour tout $a < b \in [0, 1]$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(a < X_n < b) = b - a.$$

Exercice 5. [Une variable aléatoire dans un graphe aléatoire] Pour $p \in (0, 1)$, considérons le modèle de graphe aléatoire d'Erdős-Rényi avec l'ensemble de sommets $V = \{1, 2, \dots n\}$. Montrez que le nombre total d'arêtes de ce graphe est une variable aléatoire. Quelle est sa distribution ?

Exercice 6. Rappelez l'espace de probabilité pour une marche aléatoire qui, à chaque étape, monte de 1 avec probabilité p et descend de -1 avec probabilité $1 - p$, et où les incréments à chaque étape sont indépendants.

Notons le point final de la marche à l'étape n par S_n.

- Montrez que chaque étape $S_k - S_{k-1}$ suit la loi d'une variable aléatoire de Bernoulli sur $\{-1, 1\}$ de paramètre p.
- Prouvez que $\frac{S_n+n}{2}$ suit la loi d'une variable aléatoire binomiale de paramètre p.

0.1 ⋆ Pour le plaisir (non-examinable) ⋆

Exercice 7. Considérons la marche aléatoire S_n de l'Exercice 5. Que pouvez-vous dire des probabilités des événements suivants, pour un petit ε fixé tel que $0 < \varepsilon < 1/2$, lorsque $n \to \infty$?

- pour $p = 1/2$, les événements $E_1 = \{\frac{S_n+n}{2} > \frac{n}{2}(1 + \varepsilon)\}$ et $E_2 = \{\frac{S_n+n}{2} < \frac{n}{2}(1 - \varepsilon)\}$;
- pour $p > 1/2$, l'événement $E = \{\frac{S_n+n}{2} > \frac{n}{2}(1 - \varepsilon)\}$.